次元を保存する位相郡への埋め込みについて(位相空間論とその周辺分野の研究)

名倉, 利行

数理解析研究所講究録
732巻 1990年 44-57

次元を保存する位相群への埋め込みについて

筑波大 名倉 利行 (Nagura Toshiyuki)

1. Introduction

D. B. Shakhmatov の最近の論文 [S] の内容を紹介する。

space はすべて Tychonoff space とする。

Belńov は [B] において次を示した。"任意の space X に対して、$\dim Y \le \dim X$ となる homogeneous space Y が存在して、X は Y の closed subspace となる。" そして、Y として topological group をとれるか? という問題をあげた。これに対し、Shakmatov はまず、次の否定解を与えた。

定理. $n \neq 0, 1, 3, 7$ とすると、S^n は $\dim G = n$ となる topological group G に埋め込むことはできない。

これは、$n \neq 0, 1, 3, 7$ のとき、S^n は H-space ではない、という Adams の theorem [Ad] を使って示される。こ

こではこの結果よりも、$n=0$ の場合の次の肯定解がメインである。

定理. 任意の space X に対し、次は同値である。

1) $\dim X = 0$

2) $\dim F^*(X) = 0$

3) $\dim A^*(X) = 0$

上における $F^*(X)$ ($A^*(X)$) は、X を closed に含む topological (Abelian) group である。 これについて、後で詳しく記す。

2. free topological group について

space X に対して、X を subspace として含む topological group をつくる方法として、free topological group $F(X)$ がよく知られている。([G]) group としての $F(X)$ は、X を base とする free group である。 すなわち、

$$F(X) = \{ g \mid g = \underset{(x_i = x_{i+1} \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1})}{\underline{x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}}},\ x_i \in X,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ n \in \omega \}$$

集合としてXはF(X)に自然に含まれている。topologyは、Xのもともとのtopologyをinduceするような F(X)上のgroup topologyの中で最強のものを与える。これは、Xをinduceする F(X)上のtopologyの中で、次をみたす唯一のものである。

☆ 任意の topological group G と、任意の continuous map $f: X \longrightarrow G$ に対し、homomorphic な拡張 $\tilde{f}: F(X) \longrightarrow G$ が continuous である。

このときXはF(X)の closed subspace となる。

Xに対し、group A(X) は、Xを base とする free Abelian group である。すなわち、

$$A(X) = \left\{ g \mid g = \underset{(x_i = x_j \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_j)}{\underline{\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n}},\ x_i \in X,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ n \in \omega \right\}$$

topologyは、F(X)と同様に、Xのもともとのtopologyをinduceする最強のgroup topologyを入れる。これは、Xをinduceして、かつ次をみたす A(X)上の唯一のtopologyである。

☆ 任意の topological Abelian group G と任意の conti. map $f : X \longrightarrow G$ に対して、homomorphic な拡張 $\tilde{f} : A(X) \longrightarrow G$ が continuous である。

すべての space X に対し、$\dim X = 0$ ならば $\dim F(X) = 0$（または $\dim A(X) = 0$ ）か？ という問題（[A']）は未解決である。部分解として、Tkačenko [T_1] は "$\dim X = 0$ ならば $\operatorname{ind} A(X) = 0$" を、Sipachöva [Si] は "$\dim X = 0$ ならば $\operatorname{ind} F(X) = 0$" を示した。

3. free precompact (Abelian) group $F^*(X)$ ($A^*(X)$)

space X に対し、group $F(X)$ ($A(X)$) 上の group topology で、X のもともとの topology を induce するものは、一般に一通りではない。Shakhmatov のアイデアは、$F(X)$ 上の topology を少し改良することによって、$\dim X = 0 \Rightarrow$（改良された topology で）$\dim F(X) = 0$ が常に成り立つようにすることである。

定義 1. topological group G が precompact であるとは、G がある compact group H の subgroup となるときをいう。

定義2（[S] 1.5）．　X を space，$\mathcal{T}^*$ を $F(X)$（$A(X)$）上の（Hausdorff）group topology とする。次をみたすとき，$(F(X), \mathcal{T}^*)$ を X の free precompact group（$(A(X), \mathcal{T}^*)$ を X の free precompact（Abelian）group）という。

i) $\mathcal{T}^*$ は X のもともとの topology を induce する。

ii) $\mathcal{T}^*$ は precompact．

iii) 任意の compact（Abelian）group G と，任意の continuous map $f: X \to G$ に対し，homomorphic な拡張 $\tilde{f}: (F(X), \mathcal{T}^*) \longrightarrow G$（$\tilde{f}: (A(X), \mathcal{T}^*) \longrightarrow G$）が continuous である。

命題3（[S] 1.6）．　すべての space X に対し，X の free precompact（Abelian）group $(F(X), \mathcal{T}^*)$（$((A(X), \mathcal{T}^*))$）が unique に存在する。

以後，$(F(X), \mathcal{T}^*)$，$(A(X), \mathcal{T}^*)$ をそれぞれ $F^*(X)$，$A^*(X)$ とかく。

命題4（[S] 2.9）．　X は C^*-embedded in $F^*(X)$（$A^*(X)$）。

よって，$\dim X \leq \dim F^*(X)$（$\dim A^*(X)$）である。

命題5（[S] 2.3）． $F^*(X)$ は $F^*(\beta X)$ の（自然な imbedding によって）subgroup である。 $A^*(X)$ についても同様。

$\dim X = 0 \Rightarrow \dim F^*(X) = 0$（$\dim A^*(X) = 0$）を示すために，precompact group に関する一般的な性質を調べる．

定義6（[T_2]）． topological group G が次の (*) をみたすとき，$\mathbb{R}$-factorizable であるという。

(*) 任意の continuous map $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，$w(H) \leq \omega$ なる topological group H と，continuous homomorphism $\pi : G \longrightarrow H$ と，continuous map $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して $f = \varphi \circ \pi$ をみたす。

定理7（[T_3]）． precompact group は $\mathbb{R}$-factorizable である。

定理8（[S] 3.1）． G を $\mathbb{R}$-factorizable group，$\operatorname{ind} G = 0$，H を topological group，$\pi : G \longrightarrow H$ を conti. homomorphism とするとき，ある topological group G^* と，

continuous homomorphisms $g : G \longrightarrow G^*$, $h : G^* \longrightarrow H$ が存在して、 $\pi = h \circ g$, $\mathrm{ind}\, G^* = 0$, $w(G^*) \leq w(H)$ をみたす。

証明. $w(H) = \tau$ とする。

$n \in \omega$ に対し、group G_n, continious homomorphisms $g_n : G \longrightarrow G_n$, $h_n : G_n \longrightarrow G_{n-1}$ を、次をみたすようにとる。

i) $G_0 = H$, $g_0 = \pi$

ii) $w(G_n) \leq \tau$.

iii) $g_n = h_{n+1} \circ g_{n+1}$

iv) 任意の open nbd U of e_{G_n} in G_n に対し、ある clopen nbd W of $e_{G_{n+1}}$ in G_{n+1} が存在して $W \subset h_{n+1}^{-1}(U)$.

いま、n まで G_n, g_n, h_n が定められたとする。

$\{U_n^\alpha \mid \alpha < \tau\}$ を nbd base of e_{G_n} in G_n とし、$\alpha < \tau$ を fix する。

$\mathrm{ind}\, G = 0$ より、clopen nbd V_n^α of e_G in G が存在して $V_n^\alpha \subset g_n^{-1}(U_n^\alpha)$ をみたす。

$f_{n+1}^\alpha : G \longrightarrow \mathbb{R}$ を、

$$f_{n+1}^\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in V_n^\alpha \\ 1 & \text{if } x \notin V_n^\alpha \end{cases}$$

とする。G は $\mathbb{R}$-factorizable だから、group G_{n+1}^α と、continuous homomorphism $g_{n+1}^\alpha : G \longrightarrow G_{n+1}^\alpha$, continuous onto map $\varphi_{n+1}^\alpha : G_{n+1}^\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して、$w(G_{n+1}^\alpha) \leq \omega$, $f_{n+1}^\alpha = \varphi_{n+1}^\alpha \circ g_{n+1}^\alpha$

をみたす。

$g_{n+1} = \Delta\{g^{\alpha}_{n+1} \mid \alpha < \tau\} \Delta g_n : G \longrightarrow \prod_{\alpha} G^{\alpha}_{n+1} \times G_n$ とし、

$G_{n+1} = g_{n+1}(G)$, $h_{n+1} : G_{n+1} \longrightarrow G_n$, $p^{\alpha}_{n+1} : G_{n+1} \longrightarrow G^{\alpha}_{n+1}$ を projection とする。

ii), iii) をみたすことは明らか。

$W^{\alpha}_n = (\varphi^{\alpha}_{n+1} \circ p^{\alpha}_{n+1})^{-1}(0)$ は clopen nbd of $e_{G_{n+1}}$ in G_{n+1} で、

$$g^{-1}_{n+1}(W^{\alpha}_n) \subset f^{\alpha\,-1}_{n+1}(0) = V^{\alpha}_n \subset g^{-1}_n(U^{\alpha}_n) \quad .$$

よって

$$W^{\alpha}_n \subset g_{n+1}(g^{-1}_n(U^{\alpha}_n)) \subset h^{-1}_{n+1}(U^{\alpha}_n) \quad .$$

よって iv) もみたす。

以上より、任意の $n \in \omega$ に対して、G_n, g_n, h_n がつくられた。

$g : \Delta\{g_n \mid n \in \omega\} : G \longrightarrow \prod_{n \in \omega} G_n$, $G^* = g(G)$,

$h : G^* \longrightarrow H$ を projection とする。 $\pi = h \circ g$, $w(G^*) \leq \tau$ は明らか。 iv) を使えば、$\mathrm{ind}\, G^* = 0$ もすぐわかる。 □

定理 9 ([S] 3.3). 任意の $\mathbb{R}$-factorizable group G に対し、$\mathrm{ind}\, G = 0$ と $\dim G = 0$ は必要十分である。

証明. 一般の Tychonoff space X に対し、$\dim X = 0$ ならば $\mathrm{ind}\, X = 0$ である。

いま、ind $G=0$ とする。
Z を、$w(Z)\le\omega$ なる space, $f: G\longrightarrow Z$ を continuous map とする。このとき、$w(Y)\le\omega$, $\dim Y\le 0$ なる space Y と、continuous maps $g: G\longrightarrow Y$, $h: Y\longrightarrow Z$ が存在して $f=h\circ g$ となることを示せばよい。

G は $\mathbb{R}$-factorizable だから $w(H)\le\omega$ なる topological group H と、continuous homomorphism $\pi: G\longrightarrow H$, continuous map $\varphi: H\longrightarrow Z$ が存在して $f=\varphi\circ\pi$ をみたす。
定理8 より topological group G^* と continuous homomorphisms $g: G\longrightarrow G^*$, $h: G^*\longrightarrow H$ が存在して $\pi=h\circ g$, ind $G^*=0$, $w(G^*)\le w(H)\le\omega$ をみたす。$w(G^*)\le\omega$ より $\dim G^*=0$.
よって、$Y=G^*$ とすればよい。

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, "\pi:\text{homom}"] \arrow[dd, "g:\text{homom}"'] & & Z & w(Z)\le\omega \\
 & & H \arrow[u, "\varphi"'] & w(H)\le\omega \\
G^* \arrow[urr, "h:\text{homom}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

ind $G^*=0$, $w(G^*)\le\omega$

□

定理 10 ([S] 4.1)　space X に対し，次は同値。

(i) $\dim X = 0$

(ii) $\dim F^*(X) = 0$

(iii) $\dim A^*(X) = 0$

(iv) $\operatorname{ind} F^*(X) = 0$

(v) $\operatorname{ind} A^*(X) = 0$

証明　(i) ⇒ (iv).　$\dim X = 0$ とすると $\dim \beta X = 0$。
Graev の定理 ([G]) より $\operatorname{ind} F(\beta X) = 0$。
$F_n(\beta X)$ は compact ([G]) だから $\dim F_n(X) = 0$。
$F_n^*(\beta X) \approx F_n(\beta X)$，$F^*(\beta X) = \bigcup_n F_n^*(\beta X)$ だから $\dim F^*(\beta X) = 0$。
よって $\operatorname{ind} F^*(\beta X) = 0$。命題 5 より $\operatorname{ind} F^*(X) = 0$。

(i) ⇒ (v).　上と同様に証明できる。

(ii) ⇒ (i)，(iii) ⇒ (i).　命題 4 より。

(iv) ⇒ (ii)，(v) ⇒ (iii).　定理 9 より。□

系 11 ([S] 4.3).　任意の precompact (Abelian) group G に対し，ある precompact (Abelian) group H と，continuous, onto, open, homomorphism $\pi : H \longrightarrow G$ が存在して，
$\dim H = 0$，$w(H) = w(G)$ となる。

証明. D を $|D|=|G|$ なる discrete space とし,
$\xi: D \longrightarrow G$ を 1 to 1, onto map とする。$\tilde{\xi}: \beta D \longrightarrow \beta G$
を ξ の extension とし, $X=\tilde{\xi}^{-1}(G)$, $f=\tilde{\xi}|X: X \longrightarrow G$ と
する。
f は quotient map. よって $\tilde{f}: F^*(X) \longrightarrow G$ は open map。
定理 10 より, ind $F^*(X)=0$.
定理 8 より, topological group H と, continuous homomorphisms
$g: F^*(X) \longrightarrow H$, $\pi: H \longrightarrow G$ が存在して $\tilde{f}=\pi \circ g$,
$H=g(F^*(X))$, $w(H) \leq w(G)$, ind $H=0$ をみたす。
このとき, H は precompact; よって $\dim H=0$.
$\tilde{f}$ は open だから π も open. よって $w(G) \leq w(H)$。□

上の系は, 次の事実と比べるとおもしろい。
" $\pi: H \longrightarrow G$ が continuous, onto, homomorphism,
H (and G) が pseudocompact group ならば $\dim G \leq \dim H$."
なお, pseudocompact group は precompact である。

4. Closed imbeddings into precompact groups preserving zero-dimensionality.

complete metric space X で, ind $X=0$ かつ $\dim X \neq 0$ な

るものがある ([R])．　この X に対し，定理 10 より $\mathrm{ind}\, F^*(X) \neq 0$，$\mathrm{ind}\, A^*(X) \neq 0$ である．よって，$\mathrm{ind}\, X = 0$ ならば $\mathrm{ind}\, F^*(X) = 0$ ($\mathrm{ind}\, A^*(X) = 0$) か？ という質問は No である．また，free (Abelian) topological group に関する同様の質問も No である．実際，Dowker space X ([D]) は，$F(X)$ ($A(X)$) 上の，$\mathcal{T}^* \subset \tilde{\mathcal{T}}$ なる任意の group topology $\tilde{\mathcal{T}}$ に対し，$\mathrm{ind}\,(F(X), \tilde{\mathcal{T}}) \neq 0$ ($\mathrm{ind}\,(A(X), \tilde{\mathcal{T}}) \neq 0$) である ([S] 4.6)．ところが，$F(X)$ ($A(X)$) 上の group topology をとり直すことによって，次がいえる．

定理 12 ([S] 5.1)．　$(X, \mathcal{T})$ を space，$\mathrm{ind}\, X = 0$ とする．このとき，$F(X)$ 上の group topology $\tilde{\mathcal{T}}$ で，次をみたすものがある．

i) $\tilde{\mathcal{T}}|X = \mathcal{T}$

ii) $(F(X), \tilde{\mathcal{T}})$ は precompact

iii) $w(F(X), \tilde{\mathcal{T}}) = w(X, \mathcal{T})$

iv) $\dim (F(X), \tilde{\mathcal{T}}) = 0$

v) X は closed in $(F(X), \tilde{\mathcal{T}})$

$A(X)$ についても同様．

参考文献

[S] D.B. Shakhamatov, Imbeddings into topological groups preserving dimensions, preprint.

[B] V.K. Bel'nov, The dimension of topologically homogeneous spaces and free homogeneous spaces, Soviet Math. Dokl. 19 (1978) No1. 86-89

[Ad] J.F. Adams, On the non-existense of elements of Hopf invariant one, Annals of Math. 72 (1960) 20-104.

[G] M.I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR; ser, matem. 12 (1948) 279-~~39~~ 324.

[A_1] A.V. Arhangel'skii, Algebraic objects generated by a topological structures, Itogi Nauki i Tekhniki, ser, Algebra, Topology, Geometry 25. 141-198.

[A_2] A.V. Arhangel'skii, Any topological group is a factor group of a zero-dimensional topological groups, Soviet Math. Dokl, 23 (1981) No.3 615-619.

[T_1] M.G. Tkačenko, On zerodimensional topological groups, Trans. Leningrad Intern. Top. Conference. 1982, 113-118.

[T_2] M G. Tkačenko, Factorization theorems for topological groups and their applications, Topol. Appl, to appear.

[T_3] M. G. Tkačenko, Compactness type properties in topological groups, Czech. Math. J. 38 (113) 1988 324-341.

[Si] O. V. Sipachöva, Zerodimensionality and completeness of free topological groups. Serdica (1) 1989.

[R] P. Roy, Nonequality of dimensions for metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968) 117-132.

[D] C. H. Dowker, Local dimension of normal spaces, Quart. J. Math. Oxford, 6 (1955) 101-120.